Αριθμητική Ανάλυση No. 1 Date 18/12/2019

Σύνθετος τύπος του Simpson

Έστω n άρτιος και η διαμέριση του $[a,b]$, $x_i=a+ih$, $h=\frac{b-a}{n}$. Ο σύνθετος τύπος του Simpson δίνεται ως το άθροισμα απλών τύπων του Simpson ως εξής:

$$Q^S_{n+1}(f) = Q_3(f)\big|_{[x_0,x_2]} + Q_3(f)\big|_{[x_2,x_4]} + \dots + Q_3(f)\big|_{[x_{n-2},x_n]} =$$
$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right).$$

Σφάλμα του Σύνθετου τύπου Simpson:

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180} f^{(4)}(\xi),\ \xi\in(a,b)$$

$$R^S_{n+1} = I(f) - Q^S_{n+1}(f) = R_3(f)\big|_{[x_0,x_2]} + R_3(f)\big|_{[x_2,x_4]} + \dots + R_3(f)\big|_{[x_{n-2},x_n]} =$$
$$= \frac{1}{2^4\cdot 180}\left[(x_2-x_0)^5 f^{(4)}(\xi_1) + (x_4-x_2)^5 f^{(4)}(\xi_2) + \dots + (x_n-x_{n-2})^5 f^{(4)}(\xi_{n/2})\right] =$$

$$= \frac{h^4}{180}\left[\frac{n}{2}(x_2-x_0)\,\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)\right] = \frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi),\ \xi\in(a,b)$$

Σύνθετος τύπος των 3/8:

Έστω n πολλαπλάσιο του 3 και η διαμέριση του $[a,b]$, $x_i=a+ih$, $h=\frac{b-a}{n}$. Τότε ο σύνθετος τύπος 3/8 δίνεται ως:

$$Q^{3/8}_{n+1}(f) = Q_4(f)\big|_{[x_0,x_3]} + Q_4(f)\big|_{[x_3,x_6]} + \dots + Q_4(f)\big|_{[x_{n-3},x_n]} =$$
$$= \frac{3h}{8}\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+\dots+2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Άσκηση:

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f που δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-15	-4	-1	0	5	20

, είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ και $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$, χωρίς να βρεθεί η $f(x)$.

Λύση

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = Q_3(f)\Big|_{[-2,2]} = \frac{h}{3}\left(f(-2)+4f(0)+f(2)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-15+4(-1)+5\right) = -\frac{28}{3}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = Q_3(f)\Big|_{[-2,0]} + Q_4(f)\Big|_{[0,3]} =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(-2)+4f(-1)+f(0)\right) + \frac{3h}{8}\left(f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-15+4(-4)+(-1)\right) + \frac{3}{8}\left(-1+3\cdot 0+3\cdot 5+20\right) =$$

$$= -\frac{32}{3} + \frac{51}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = Q_4(f)\Big|_{[-2,1]} - Q_3(f)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3h}{8}\left(f(-2)+3f(-1)+3f(0)+f(1)\right) - \frac{h}{3}\left(f(-1)+4f(0)+f(1)\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(-15+3(-4)+3(-1)+0\right) + \frac{1}{3}\left(-4+4(-1)+0\right) = -\frac{45}{4} + \frac{8}{3} =$$

$$= -\frac{103}{12}$$

- Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 xe^x\,dx$ πρόκειται να εφαρμοστούν οι σύνθετοι τύποι τραπεζίου και Simpson. Ποιο h πρέπει να πάρουμε στην κάθε περίπτωση ώστε να εξασφαλίζεται ακρίβεια 6 δ.ψ.;

$$R^{T}_{n+1} = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi)$$

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$f'''(x) = (3+x)e^x$

$f^{(4)}(x) = (4+x)e^x.$

$$|R^{T}_{n+1}(f)| = \frac{h^2}{12}(b-a)|f''(\xi)| \quad , \quad |f''(\xi)| = (2+\xi)e^{\xi} \le 3e$$

Πρέπει $|R^{T}_{n+1}(f)| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$, οπότε $\frac{h^2}{12}\cdot 3e \le \frac{1}{2}10^{-6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1\cdot e}{n^2\cdot 2} \le 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{10^6}{2}e \Leftrightarrow n \ge \sqrt{\frac{10^6 e}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}\cdot 10^3 = 1165.8$

Το μικρότερο δυνατό n που μπορώ να πάρω 1166

$\max\limits_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)| = 5e$

$\frac{h^4}{180}\cdot 5e \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{n^4\cdot 18}e \le 10^6 \Leftrightarrow n^4 \ge \frac{10^6}{18}e \Leftrightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{10^6}{18}e}$

$\simeq 19.7$, Παίρνω $n = 20$

Τύποι Ολοκλήρωσης με προσδιοριστέους συντελεστές:

Να προσδιοριστούν τα a_1 κ' a_2 ώστε ο τύπος αρ. ολοκλ.

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \quad , \quad x_i = x_0 + ih.$$

να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής. Για ποια πολ/μα μέχρι ποιου βαθμού θα είναι ακριβής;

Ακριβής στον P_0

$f(x) = 1$: $I(f) = \int_{x_0}^{x_3} 1dx = [x]_{x_0}^{x_3} = x_3 - x_0 = 3h$

$Q(f) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) = a_1 + a_2$

$$\boxed{a_1 + a_2 = 3h}$$

Ακρίβεια στον P_1:

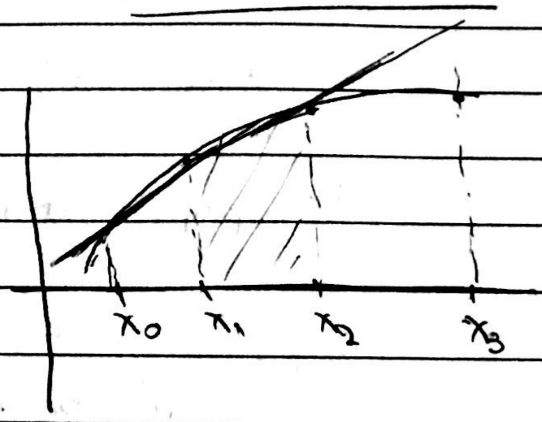
$f(x) = x$: $I(f) = \int_{x_0}^{x_3} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_3} = \frac{x_3^2 - x_0^2}{2} =$

$= \frac{(x_3 - x_0)(x_3 + x_0)}{2} = \frac{3h}{2}(2x_0 + 3h) = 3hx_0 + \frac{9h^2}{2}$

$Q(f) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1(x_0 + h) + a_2(x_0 + 2h) =$
$= (a_1 + a_2)x_0 + (a_1 + 2a_2)h$

$$\boxed{a_1 + 2a_2 = \frac{9h}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 3h \\ a_1 + 2a_2 &= \frac{9h}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \frac{3}{2}h$$



$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) = \frac{3h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$f(x) = x^2$: $I(f) \neq Q(f)$